2020-2021 Eğitim-Öğretim Yılı MAT468 FONKSİYONEL ANALİZ QUİZ SORULARI

1- $Y=\{f\epsilon C[a,b]: f(a)=f(b)\}$ olmak üzere Y uzayının tam olduğunu gösteriniz.

2- $d: IR\times IR \to IR, d(x,y)=min\{1,|x-y|\}$ olmak üzere

a) (IR,d) nin bir metrik uzay olduğunu gösteriniz.

b) Bu uzayda $B(0,1)$ ve $B[0,1]$ birim yuvarlarını belirleyiniz.

3- $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ metrik uzaylar, $X=X_1\times X_2$, $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ ve

$$m(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,x_2)+d_2(y_1,y_2)}$$

olarak tanımlanıyor.

a) (X,m) bir metrik uzaydır. Gösteriniz.

b) $f: X_1\to X_2$ sürekli ise f nin $G_r(f)=\{(x,f(x)): x\epsilon X_1\}$ grafiğinin kapalı olduğunu gösteriniz.

4- $f\epsilon C[0,1]$ için $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)|: x\epsilon[0,1]\}$ olmak üzere

a) $(C[0,1],\|.\|_\infty)$ bir normlu uzaydır, gösteriniz.

b) $f_1(x)=sin(\pi x)$ ve $f_2(x)=cos(\pi x)$ ise $\|f_1-f_2\|_\infty$=?

5- $a_n=\frac{x^n}{2^n}$ olmak üzere hangi $x\epsilon IR$ değerleri için (a_n) dizisi l_1 uzayına aittir? Bu durumda (a_n) dizisinin $\|a_n\|_1$, l_1-normunu bulunuz. $x=\sqrt{3}$ için $\|a_n\|_1$ normunu bulunuz.

Not: Sınav 16.04.2021 Cuma günü 13:30-15:00 saatleri arasında gerçekleşecektir. Süre 90 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar...

Prof.Dr.Birsen Sağır Duyar

ÇÖZÜMLER

1) $C[a,b]$ nin $d(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$ metriğine göre tam olduğu biliniyor. Tam uzayın kapalı alt uzayı da tam olacağından, Y nin tam olduğunu göstermek için kapalı olduğunu göstermek yeter. $\forall f\in\overline{Y}$ alalım. Buradan $d(f_n,f)\to 0$ olacak şekilde bir $(f_n)\subset Y$ dizisi vardır. $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>n_0$ için $\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$ dır.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>n_0$ ve $\forall t\in[a,b]$ için $|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon$, $|f_n(b)-f(b)|<\varepsilon$

Bu ise $\mathbb{R}$ de $f_n(a)\to f(a)$, $f_n(b)\to f(b)$ demektir. Diğer yandan

$(f_n)\subset Y$ old. $f_n(a)=f_n(b)$ olup,

$0=\lim_{n\to\infty}|f_n(a)-f_n(b)|=f(a)-f(b) \Rightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow f\in Y$ olur.

Yani $\overline{Y}\subset Y$ bulunur. $Y\subset\overline{Y}$ idi. Böylece $\overline{Y}=Y$ olup, Y kapalıdır.

$\Rightarrow Y$ tamdır.

2) $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$

a) $d(x,y)=0 \iff \min\{1,|x-y|\}=0 \iff |x-y|=0 \iff x=y$

$d(x,y)=\min\{1,|x-y|\} = \min\{1,|y-x|\} = d(y,x)$

olduğundan M_1 ve M_2 sağlanır.

M3. $d(x,y)=\min\{1,|x-y|\} \leq 1$ dir. O zaman $d(x,z)=1$ veya $d(z,y)=1$

ise üçgen eşitsizliği gerçekleşir, ancak

$d(x,z)<1$ ve $d(z,y)<1 \Rightarrow d(x,z)=|x-z|$ ve $d(z,y)=|z-y|$

$\Rightarrow d(x,y)=\min\{1,|x-y|\} \leq |x-y| \leq |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y)$

$\Rightarrow M_3$ sağlanır.

$\Rightarrow d$ metrik olur.

b) $B(0,1)=(-1,1)$, $B[0,1]=\mathbb{R}$

3) (X_1,d_1), (X_2,d_2) metrik uzaylar, $X=X_1\times X_2$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$

$m(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,x_2)+d_2(y_1,y_2)}$ veriliyor.

a) $m(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)}$ olarak verilmeli idi. Buna göre

M_1 ve M_2 aşikar. $z=(z_1,z_2)\in X_1\times X_2$ alalım.

d_1 ve d_2 metrik olduğundan M3 koşulunu sağlar. Böylece

$$m(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)}$$
$$\leq \sqrt{d_1(x_1,z_1)+d_1(z_1,y_1)+d_2(x_2,z_2)+d_2(z_2,y_2)}$$
$$\leq \sqrt{d_1(x_1,z_1)+d_2(x_2,z_2)}+\sqrt{d_1(z_1,y_1)+d_2(z_2,y_2)}$$
$$= m(x,z)+m(z,y)$$

b) $f: X_1\to X_2$ sürekli dolayısıyla dizisel sürekli olur.

$(a,b)\in \overline{Gr(f)}$ olsun. $Gr(f)\subset \overline{Gr(f)} \Rightarrow (a,b)\in Gr(f)$ olur.

$\Rightarrow (x_n, f(x_n)) \xrightarrow{m} (a,b)$ $(n\to\infty)$ olacak şekilde X_1 de bir (x_n)

dizisi vardır.

$m((x_n,f(x_n)),(a,b)) = \sqrt{d_1(x_n,a)+d_2(f(x_n),b)} \to 0 \Rightarrow$

$d_1(x_n,a)\to 0$ ve $d_2(f(x_n),b)\to 0$ dır. f dizisel sürekli

olduğundan $b=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ dır. O halde

$(a,b)=(a,f(a))\in Gr(f)$ olur. $\Rightarrow \overline{Gr(f)}\subset Gr(f)$

ve böylece $\overline{Gr(f)}=Gr(f)$ yani $Gr(f)$ kapalı olur.

4) a) $f \in C[0,1]$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

N1. $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \iff |f(x)| = 0,\ x\in[0,1] \iff f = 0$

N2. $\|\lambda f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \lambda . \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = \lambda . \|f\|_\infty$

N3. $f, g \in C[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$ için $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \Rightarrow$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|)$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

b) $f_1(x) = \sin(\pi x)$, $f_2(x) = \cos(\pi x) \Rightarrow \|f_1 - f_2\|_\infty = ?$

$g(x) = f_1(x) - f_2(x) = \sin(\pi x) - \cos(\pi x) \Rightarrow g'(x) = \pi\cos(\pi x) + \pi \sin(\pi x)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \tan(\pi x) = -1$ old. (yani $x = \frac{3}{4}$ olduğunda $g'(x) = 0$ dır.

Aynı zamanda $g(0) = -1$, $g(1) = 1$, $g(\frac{3}{4}) = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow \|f_1(x) - f_2(x)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| = \sqrt{2}$ bulunur.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n = -1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ yakınsak $\iff \frac{|x|}{2} < 1$

$\frac{|x|}{2} < 1 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$ değerleri için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

olup, $a_n \in \ell_1$ olur. ve

$$\|a_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n = -1 + \frac{1}{1 + \frac{|x|}{2}} = \frac{|x|}{2-|x|}$$

$x = \sqrt{3}$ için $\|a_n\|_1 = \left.\frac{|x|}{2-|x|}\right|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+3$ olur.